УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 4 Физико-математические науки *2009*

УДК 514.764.2

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И СОЛИТОНЫ РИЧЧИ

С.Е. Степанов, И.Г. Шандра, В.Н. Шелепова

Аннотация

Солитон Риччи на гладком многообразии M представляет собой тройку (g_0, ξ, λ), где g_0 – полная риманова метрика, ξ – векторное поле, а λ – константа такие, что тензор Риччи Ric_0 метрики g_0 удовлетворяет уравнению $-2\mathrm{Ric}_0 = L_\xi g_0 + 2\lambda g_0$. В статье геометрия солитонов Риччи изучается в зависимости от свойств векторного поля ξ. В частности, доказано, что это векторное поле является гармоническим преобразованием.

Ключевые слова: риманово многообразие, инфинитезимальное гармоническое преобразование, солитон Риччи.

1. Лапласиан Яно

1.1. Пусть (M, g) – риманово многообразие размерности $n \geq 2$ со связностью Леви–Чивита ∇, $\Lambda^p M = \Lambda^p(T^*M)$ и $S^pM = S^p(T^*M)$ – векторные расслоения дифференциальных p-форм и ковариантных симметрических p-тензоров $(p \geq 1)$ на M.

С помощью римановой метрики g в слоях тензорных расслоений $\Lambda^p M$ и S^pM индуцируется риманова структура, а в случае компактности многообразия M задается *глобальное скалярное произведение* формулой

$$\langle \omega, \theta \rangle = \int\limits_M \frac{1}{p!} g(\omega, \theta)\, dv$$

для произвольных сечений $\omega, \theta \in C^\infty \Lambda^p M$ и соответственно $\omega, \theta \in C^\infty S^p M$ и канонической формы объема dv многообразия (M, g).

Каждый дифференциальный оператор D, действующий между пространствами сечений тензорных расслоений на многообразии (M, g), обладает каноническим формально сопряженным оператором D^*, который (см. [1, с. 626]) определяется равенством $\langle D\cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, D^* \cdot \rangle$. Хорошо известно (см. [2, с. 166–167]), что для внешнего дифференцирования $d : C^\infty \Lambda^p M \to C^\infty \Lambda^{p+1} M$ формально сопряженным оператором служит оператор кодифференцирования $\delta : C^\infty \Lambda^{p+1} M \to C^\infty \Lambda^p M$, или, по другой терминологии, *дивергенция*. На базе операторов d и δ строится известный самосопряженный лапласиан Ходжа – де Рама $\Delta = d\delta + \delta d : C^\infty \Lambda^p M \to C^\infty \Lambda^p M$.

При этом имеет место ортогональное относительно глобального скалярного произведения разложение Ходжа $C^\infty \Lambda^p M = \Delta(C^\infty \Lambda^p M) \oplus \mathrm{Ker}\, \Delta(C^\infty \Lambda^p M)$, где вторая компонента $\mathrm{Ker}\, \Delta$ разложения представляет собою конечномерное векторное пространство гармонических p-форм (см. [2, с. 206]).

1.2. Для аналогичного d дифференциального оператора $\delta^* : C^\infty S^p M \to$ $\to C^\infty S^{p+1} M$, представляющего собою композицию оператора ковариантного дифференцирования $\nabla : C^\infty S^p M \to C^\infty (T^*M \otimes S^p M)$ с алгебраическим оператором симметризации $S^{p+1} : C^\infty(T^*M \otimes S^pM) \to C^\infty S^{p+1}M$, формально сопряженным оператором будет оператор $\delta : C^\infty S^{p+1}M \to C^\infty S^pM$, называемый *дивергенцией* (см. [1, с. 54–55, 626]).

Рассмотрим дифференциальный оператор $\Box : C^\infty S^pM \to C^\infty S^pM$ такой, что $\Box = \delta\delta^* - \delta^*\delta$. Непосредственно проверяется, что

$$\langle \Box\omega, \theta\rangle = \langle \delta\delta^*\omega, \theta\rangle - \langle \delta^*\delta\omega, \theta\rangle = \langle \delta^*\omega, \delta^*\theta\rangle - \langle \delta\omega, \delta\omega\rangle =$$
$$= \langle \omega, \delta\delta^*\theta\rangle - \langle \omega, \delta^*\delta\theta\rangle = \langle \omega, \Box\theta\rangle,$$

следовательно, $\Box$ – *самосопряженный оператор*. Считая далее, что $\vartheta \in T^*_xM - \{0\}$, а $\omega_x \in S^p_xM = S^p(T^*_xM)$, найдем символ $\sigma(\Box)$ дифференциального оператора $\Box$ (см. [1, с. 627–628; 3, с. 64, 79, 87]). Имеем (см. [4])

$$\sigma(\Box)(\vartheta, x)\omega_x = -\vartheta^\sharp \llcorner (\vartheta \circ \omega_x) + \vartheta \circ (\vartheta^\sharp \llcorner \omega_x) = -g(\vartheta, \vartheta)\omega_x$$

для тензорного симметрического умножения $\circ$, внутреннего произведения $\llcorner$ и изоморфизма $\sharp : T^*M \to TM$, соответствующего поднятию индекса. Произведенные вычисления позволяют сделать вывод, что оператор $\Box$ является *лапласианом*, и, следовательно, его ядро $\operatorname{Ker}\Box$ является конечномерным векторным пространством (см. [1, с. 77, 631–632; 3, с. 178]). Тогда в соответствии с общей теорией (см. [1, с. 632–633]) на компактном римановом многообразии (M, g) имеет место следующее ортогональное относительно глобального скалярного произведения разложение

$$C^\infty S^pM = \Box(C^\infty S^pM) \oplus \operatorname{Ker}\Box(C^\infty S^pM), \tag{1.1}$$

которое аналогично разложению Ходжа.

1.3. Рассмотрим действие $\Box : C^\infty T^*M \to C^\infty T^*M$. Для этого в локальной системе координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ произвольной карты (U, ϕ) U многообразия M полагаем $\omega = \omega_k dx^k$, тогда

$$\Box\omega_k = (\delta\delta^* - \delta^*\delta)\omega_k = -g^{ij}\nabla_i(\nabla_j\omega_k + \nabla_k\omega_j) - \nabla_k(-g^{ij}\nabla_i\omega_j) =$$
$$= -g^{ij}(\nabla_i\nabla_j\omega_k + R_{ki}\omega_j) = \Delta\omega_k - 2g^{ij}R_{ki}\omega_j,$$

где ∇_i – ковариантное дифференцирование в направлении векторного поля $X_k = \partial/\partial x^k$, g^{ij} – локальные контравариантные компоненты метрического тензора g, R_{ij} – локальные компоненты тензора Риччи Ric многообразия (M, g) и, наконец, $\Delta\omega_k = (d\delta + \delta d)\omega_k = -g^{ij}\nabla_i\nabla_j\omega_k + g^{ij}R_{ik}\omega_j$ – локальное представление лапласиана Ходжа–де Рама (см. [5, с. 63]).

Если ввести в рассмотрение векторное поле $\xi = \omega^\sharp$, то $\Box\xi = \Delta\xi - 2\mathrm{Ric}^*\xi$. Именно в таком виде оператор $\Box$ был введен К. Яно (см. [6, с. 40]) для изучения киллинговых и гармонических векторных полей. На этом основании для любого $p \geq 1$ оператор $\Box = \delta\delta^* - \delta^*\delta$ назовем *лапласианом Яно*.

2. Инфинитезимальные гармонические преобразования и солитоны Риччи

2.1. Произвольное векторное поле $\xi \in C^\infty TM$ порождает в окрестности U каждой точки риманова многообразия (M, g) локальную 1-параметрическую группу инфинитезимальных преобразований $\varphi_t(x) = \overline{x}^k = x^k + t\xi^k$ для локальной системы координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ в окрестности U, параметра $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \subset \mathbf{R}$ и

$\xi = \xi^k \partial_k$ (см. [7, с. 21–23; 8, с. 39–41]). Поэтому векторное поле ξ называют еще *инфинитезимальным преобразованием* в многообразии (M, g). При этом символы Кристоффеля Γ_{ij}^k связности Леви–Чивита ∇ в результате инфинитезимального преобразования предстанут в следующем виде

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + t(\nabla_i \nabla_j \xi^k - R_{ijl}^k \xi^l) \tag{2.1}$$

для компонент R_{ijl}^k тензора кривизны R связности ∇ (см. [7, с. 37; 8, с. 40, 41]).

Если локальная однопараметрическая группа инфинитезимальных преобразований, порожденная полем ξ в окрестности каждой точки риманова многообразия (M, g), состоит из инфинитезимальных гармонических преобразований, векторное поле ξ назовем *инфинитезимальным гармоническим преобразованием* риманова многообразия (см. [9]).

Доказано (см. [9]), что диффеоморфизм $\varphi : (M, g) \longrightarrow (\overline{M}, \overline{g})$ является *гармоническим отображением* тогда и только тогда, когда тензор деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$ подчиняется условию $\operatorname{trace}_g T = 0$. В соответствии с этим на основании равенств (2.1) заключаем, что определяющими для инфинитезимального гармонического преобразования ξ будут служить уравнения

$$\Box \xi = \Delta \xi - 2\mathrm{Ric}^* \xi = 0. \tag{2.2}$$

Доказана (см. [3, 9, 10])

Теорема 2.1. *Инфинитезимальные гармонические преобразования в (M, g) и только они составляют ядро лапласиана Яно.*

Таким образом, на компактном римановом многообразии (M, g) в разложении $C^\infty T^*M = \Box(C^\infty T^*M) \oplus \operatorname{Ker} \Box(C^\infty T^*M)$ конечномерная компонента $\operatorname{Ker} \Box$ состоит из инфинитезимальных гармонических преобразований.

Векторное поле ξ называется *инфинитезимальной изометрией*, если оно порождает однопараметрическую локальную группу локальных изометрий (см. [5, с. 60]). В этом случае по отношению к векторному полю ξ производная Ли $L_\xi g = 0$. На компактном римановом многообразии (M, g) последнее уравнение равносильно (см. [5, с. 63]) системе дифференциальных уравнений

$$\Box \xi = \Delta \xi - 2\mathrm{Ric}^* \xi = 0, \quad \delta \xi = 0.$$

Отсюда следует, что конечномерное векторное пространство инфинитезимальных гармонических преобразований $\operatorname{Ker} \Box$ имеет в качестве подпространства векторное пространство инфинитезимальных изометрий $\operatorname{Ker} \Box \cap \operatorname{Ker} \delta$.

Известно (см. [7, с. 240]), что на компактном римановом многообразии (M, g) имеет место ортогональное (относительно глобального скалярного произведения) разложение пространства 1-форм $C^\infty(T^*M) = \operatorname{Im} d \oplus \operatorname{Ker} \delta$. А потому $\operatorname{Ker} \Box = (\operatorname{Ker} \Box \cap \operatorname{Ker} \delta) \oplus (\operatorname{Ker} \Box \cap \operatorname{Im} d)$, где пространство $\operatorname{Im} d \cap \operatorname{Ker} \Box$ является ортогональным дополнением пространства инфинитезимальных изометрий $\operatorname{Ker} \Box \cap \operatorname{Ker} \delta$ до всего пространства $\operatorname{Ker} \Box$ инфинитезимальных гармонических преобразований. В итоге имеем следующее ортогональное разложение:

$$C^\infty(T^*M) = \operatorname{Im} \Box \oplus (\operatorname{Ker} \Box \cap \operatorname{Ker} \delta) \oplus (\operatorname{Ker} \Box \cap \operatorname{Im} d),$$

которое служит аналогом разложения Ходжа $C^\infty(T^*M) = \operatorname{Im} \Delta \oplus (\operatorname{Ker} d \cap \operatorname{Ker} d)$.

Замечание. Свойства и примеры инфинитезимальных гармонических преобразований были установлены нами в следующих статьях [4, 9, 10]. Ниже приведем еще один пример инфинитезимального гармонического преобразования.

2.2. На n-мерном гладком многообразии M семейство римановых метрик $g_t = g(t)$, определенных на временном интервале $J \subset \mathbf{R}$, включающем 0, называется *потоком Риччи* (см. [11, с. 21; 12, с. 98]), если выполняются уравнения Гамильтона потока Риччи $\dfrac{\partial g}{\partial t} = -2\mathrm{Ric}_0$ для $g_0 = g(0)$ и тензора Риччи Ric_0 метрики g_0.

С самоподобным решением этих уравнений на многообразии M размерности $n \geq 2$ связано понятие *солитона Риччи* (см. [11, с. 22–23]) как триплета (g_0, ξ, λ) для метрики g_0, векторного поля ξ и постоянной λ, связанных уравнением

$$-2\mathrm{Ric}_0 = L_\xi g_0 + 2\lambda g_0, \tag{2.3}$$

где Ric_0 – тензор Риччи метрики g_0 и $L_\xi g_0 = \delta^*\omega$ – производная Ли метрического тензора g_0 по отношению к $\xi = \omega^\sharp$. При $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$ солитон Риччи называется *устойчивым*, *стягивающимся* и *растягивающимся* соответственно. Солитон Риччи (g_0, ξ, λ) называется *градиентным* (см. [11, с. 22; 12, с. 154]), если 1-форма ω является градиентом некоторой функции $f \in C^\infty M$. Функция f называется *потенциалом* солитона Риччи. В случае, когда $\delta^*\omega = 0$, солитон называется *эйнштейновым*, и в частности, когда $\omega = 0$, солитон называется *тривиальным*.

Из уравнения (2.3) вытекает, что $\delta^*\omega = -2(\mathrm{Ric} + 2\lambda g)$, и, следовательно, $\delta\omega = s + n\lambda$, поэтому $\square\omega = (\delta\delta^* - \delta^*\delta)\omega = -\delta(2\mathrm{Ric}) - ds = 0$. Доказана (см. [13])

Теорема 2.2. *На n-мерном $(n \geq 2)$ многообразии M векторное поле ξ солитона Риччи (g_0, ξ, λ) является инфинитезимальным гармоническим преобразованием риманова многообразия (M, g_0).*

3. Инфинитезимальные гармонические преобразования и солитоны Риччи на компактном римановом многообразии

3.1. Пусть (M, g) – компактное риманово многообразие и $\xi = \omega^\sharp$ – инфинитезимальное гармоническое преобразование. Из равенства $\square\omega = \Delta\xi - 2\mathrm{Ric}^*\xi = 0$ следует, что

$$2\langle \mathrm{Ric}^*\xi, \xi\rangle = \langle \Delta\xi, \xi\rangle = \langle d\omega, d\omega\rangle + \langle \delta\omega, \delta\omega\rangle. \tag{3.1}$$

Из (3.1) с очевидностью выводится справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Компактное риманово многообразие (M, g) не допускает отличных от нуля инфинитезимальных гармонических преобразований, если тензор Риччи этого многообразия неположительно определен и хотя бы в одной точке многообразия определен строго отрицательно.*

Для солитона Риччи (g_0, ξ, λ) из теоремы 3.1 следует, что $\mathrm{Ric}_0 = -\lambda g_0 < 0$, откуда вытекает, что $\lambda > 0$, и солитон, следовательно, становится растягивающимся тривиальным. При этом заметим, что неравенство $\mathrm{Ric}_0(\xi, \xi) < 0$ несовместимо с (3.1). Справедливо

Следствие 3.1. *На компактном многообразии M не существует солитона Риччи (g_0, ξ, λ), для которого $\mathrm{Ric}_0(\xi, \xi) < 0$. Если же для солитона Риччи (g_0, ξ, λ) тензор Риччи $\mathrm{Ric}_0 \leq 0$ и хотя бы в одной точке многообразия $\mathrm{Ric}_0 < 0$, то такой солитон Риччи является растягивающимся тривиальным.*

Замечание. Установленный в следствии 3.1 факт согласуется с доказанной ранее теоремой (см. [14]), согласно которой растягивающийся солитон Риччи на компактном многообразии является тривиальным.

Используя разложение пространства инфинитезимальных гармонических преобразований в ортогональную сумму подпространств инфинитезимальных изометрий и градиентных инфинитезимальных гармонических преобразований (см. п. 2.1), мы можем сформулировать (см. также [14])

Следствие 3.2. *На компактном многообразии M каждый солитон Риччи (g_0, ξ, λ) является градиентным.*

Для дальнейших исследований воспользуемся интегральной формулой (1.14) из главы 2 монографии [6] вида

$$\int\limits_M \left[g(\Box\omega,\omega) + n^{-1}(n-2)g(d\,\delta\omega,\omega) - 2^{-1}\|\delta^*\omega + 2n^{-1}(\delta\omega)g\|^2\right]\,dv = 0. \tag{3.2}$$

для произвольной 1-формы $\omega \epsilon C^\infty T^*M$ на компактном многообразии (M,g). Для инфинитезимального гармонического преобразования $\xi = \omega^\sharp$ формула (3.2) принимает следующий вид:

$$\int\limits_M \left[2(n-2)g(d\delta\omega,\omega) - n\|\delta^*\omega + 2n^{-1}(\delta\omega)g\|^2\right]\,dv = 0 \tag{3.3}$$

Отметим здесь справедливость равенств

$$g(d\,\delta\omega,\omega) = \xi(\delta\omega) = -\xi(\operatorname{div}\xi) = -L_\xi(\operatorname{div}\xi).$$

На этом основании из (3.3) при условии, что $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geq 0$, выводится следующее равенство $\delta^*\omega + 2n^{-1}(\delta\omega)g = 0$. При этом на компактном многообразии требование $g(d\,\delta\omega,\omega) = -L_\xi(\operatorname{div}\xi) \leq 0$ означает $\operatorname{div}\xi = 0$. Действительно, из $\langle\delta\omega,\delta\omega\rangle = \langle d\,\delta\omega,\omega\rangle \leq 0$ вытекает, что $\delta\omega = -\operatorname{div}\xi = 0$, и тогда $\delta^*\omega = L_\xi g = 0$. Последнее уравнение является определяющим для *киллингова векторного поля*, или, по другой терминологии, *инфинитезимальной изометрии* риманова многообразия (см. [5, с. 60–61]). В свою очередь, условие $\delta\omega = -\operatorname{div}\xi = 0$ непосредственно следует из этого уравнения. Доказана следующая

Теорема 3.2. *На компактном римановом многообразии (M,g) инфинитезимальное гармоническое преобразование ξ, подчиняющееся условию $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geq 0$, является инфинитезимальной изометрией, то есть $L_\xi g = 0$.*

Для солитона Риччи (g_0, ξ, λ) имеем $d\,\delta\omega = d(s_0 + n\lambda) = ds_0 = L_\xi(s_0)$. Поэтому справедливо

Следствие 3.3. *Если на компактном многообразии M скалярная кривизна s_0 метрики g_0 солитона Риччи (g_0, ξ, λ) подчиняется условию $L_\xi(s_0) \geq 0$, то солитон является эйнштейновым.*

Замечание. Для стягивающегося солитона Риччи (g_0, ξ, λ) на компактном многообразии M в размерности $n = 3$ многообразие (M, g_0) изометрично сфере четырехмерного евклидова пространства, а в размерности $n > 3$ условие эйнштейновости состоит в требовании обращения в нуль тензора Вейля (см. [14]). В [14] была также обозначена проблема получения других условий эйнштейновости для стягивающегося солитона Риччи при условии, что $n > 3$. Сформулированное выше утверждение является одним из возможных ответов на поставленный вопрос.

3.2. Рассмотрим инфинитезимальное гармоническое преобразование ξ на двумерном компактном римановом многообразии (M,g). Из формулы (3.2) в этом случае следует, что $\delta^*\omega + 2n^{-1}(\delta\omega)g = 0$. Это равенство является определяющим для конформно киллингова векторного поля, или, по другой терминологии, инфинитезимального конформного преобразования $\xi = \omega^\sharp$ риманова многообразия (M,g). Обратно, если $\xi = \omega^\sharp$ является инфинитезимальным конформным преобразованием, то согласно формуле (6.3) из главы 2 монографии [6], имеющей вид $\Box\omega + n^{-1}(n-2)d\,\delta\omega = 0$, заключаем, что при $n = 2$ поле ξ является инфинитезимальным гармоническим преобразованием. Справедлива

Теорема 3.3. *На двумерном компактном римановом многообразии* (M,g) *каждое инфинитезимальное гармоническое преобразование является инфинитезимальным конформным преобразованием. Верно и обратное.*

Замечание. Геометрия двумерного компактного многообразия M с градиентным солитоном Риччи (g_0, ξ, λ) известна (см. [14]). Так, например, установлено, что двумерное компактное многообразие M с градиентным стягивающимся солитоном Риччи (g_0, ξ, λ) изометрично сфере трехмерного евклидова пространства или двумерному вещественному проективному пространству.

4. Инфинитезимальные гармонические преобразования и солитоны Риччи на некомпактном римановом многообразии

4.1. Пусть ξ – инфинитезимальное гармоническое преобразование в римановом многообразии (M,g) с отрицательным тензором Риччи. Полагаем $f = g(\xi,\xi)/2$ функцией длины инфинитезимального гармонического преобразования ξ, тогда на основании (2.2) получаем

$$\Delta f = \|\nabla\xi\|^2 - \mathrm{Ric}(\xi,\xi). \tag{4.1}$$

Если функция $f = g(\xi,\xi)/2$ имеет локальный максимум в точке $x \in M$, то $(\Delta f)_x \leq 0$. С другой стороны, согласно предположению, $\Delta f > 0$, если $\xi \neq 0$. Поэтому векторное поле ξ должно быть нулевым в точке x. Так как $f = g(\xi,\xi)/2$ имеет локальный максимум в точке $x \in M$ (см. [5, с. 80]), то ξ обращается в нуль в некоторой окрестности точки $x \in M$. Нами доказан локальный вариант теоремы 3.1, а именно справедлива

Теорема 4.1. *Пусть* (M,g) *– риманово многообразие с отрицательным тензором Риччи. Если существует точка* $x \in M$, *в которой функция длины инфинитезимального гармонического преобразования* ξ *имеет локальный максимум, то* ξ *обращается в нуль в этой точке* $x \in M$ *и некоторой ее окрестности* $U_x \subset M$.

Уравнения солитона Риччи (g_0, ξ, λ) в окрестности $U_x \subset M$ принимают вид $\mathrm{Ric}_0 = -\lambda g_0$, поэтому солитон является растягивающимся тривиальным. Справедливо утверждение, являющееся аналогом следствия 3.1

Следствие 4.1. *Пусть* (g_0, ξ, λ) *– солитон Риччи с отрицательно определенным тензором Риччи* Ric_0. *Если существует точка* $x \in M$, *в которой функция длины векторного поля* ξ *имеет локальный максимум, то в некоторой окрестности* $U_x \subset M$ *этой точки* $\mathrm{Ric}_0 = -\lambda g_0$, *и солитон становится растягивающимся тривиальным.*

Для функции $f = g(\xi,\xi)/2$ длины векторного поля ξ солитона Риччи (g_0, ξ, λ) на основании уравнений (2.3) находим: $\xi(f) = -\mathrm{Ric}_0(\xi,\xi) - 2\lambda f$. Если предположить, что функция f имеет критическую точку $x \in M^n$, в которой $\xi_x \neq 0$, то $(df)_x = 0$, и, следовательно, $\mathrm{Ric}_0(\xi_x, \xi_x) = -2\lambda f$. В результате будет справедлива

Теорема 4.2. *Если существует критическая точка $x \in M$ для функции $f = g(\xi, \xi)/2$ длины векторного поля ξ солитона Риччи (g_0, ξ, λ), в которой $\xi_x \neq 0$, то солитон будет стягивающимся (соответственно растягивающимся или стабильным), если в этой точке $\mathrm{Ric}_0(\xi_x, \xi_x) > 0$ (соответственно $\mathrm{Ric}_0(\xi_x, \xi_x) < 0$ или $\mathrm{Ric}_0(\xi_x, \xi_x) = 0$).*

4.2. Из теоремы 3.2 следует, что на компактном многообразии M солитон Риччи (g_0, ξ, λ) с постоянной скалярной кривизной s_0 метрики g_0 является эйнштейновым. Рассмотрим такой же солитон в некомпактном случае.

Пусть скалярная кривизна s_0 метрики g_0 солитона Риччи (g_0, ξ, λ) является постоянной величиной. На основании равенства $\delta\Delta = \Delta\delta$ (см. [2, с. 167]) из уравнений (2.2) выводим: $\Delta_H \delta\omega = \delta(2\mathrm{Ric}_0^* \xi)$; правая часть обратится в нуль, поскольку $\Delta\delta\omega = -\Delta \mathrm{div}\, \xi = \Delta(s_0 + n\lambda) = 0$, и одновременно для правой части имеем:

$$\delta(2\mathrm{Ric}_0^*\xi) = -(2\nabla^k R_{kj})\xi^j - 2R_{kj}\nabla^k \xi^j =$$
$$= -\xi^j \nabla_j s_0 - R_{kj}(\nabla^k \xi^j + \nabla^j \xi^k) = -R_{kj}(\nabla^k \xi^j + \nabla^j \xi^k).$$

В итоге приходим к равенству

$$R_{kj}(\nabla^k \xi^j + \nabla^j \xi^k) = 0. \tag{4.2}$$

Из уравнений солитона Риччи (2.3) находим: $L_\xi g_{ij} = -2(R_{ij} + \lambda g_{ij})$, с учетом этого из (4.2) выводим, что

$$-2R_{kj}(R^{kj} + \lambda g^{kj}) = -2(\|\mathrm{Ric}_0\|^2 + \lambda s_0) = 0,$$

откуда

$$\lambda s_0 = -\|\mathrm{Ric}_0\|^2 \leq 0. \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, во-первых, что ненулевые постоянные λ и s_0 имеют разные знаки и, во-вторых, что при $\lambda = 0$ или $s_0 = 0$ метрика g_0 с необходимостью становится Риччи-плоской. Причем в первом случае векторное поле ξ – инфинитезимальная изометрия, что очевидно, а во втором – *инфинитезимальная гомотетия*, поскольку $L_\xi g_0 = -2\lambda g_0$.

Согласно тех же уравнений (2.3) имеем: $R_{ij} = -2^{-1} L_\xi g_{ij} - \lambda g_{ij}$, и тогда из (4.2) следует, что $\|L_\xi g_{ij}\|^2 - 4\lambda(s_0 + n\lambda) = 0$, откуда

$$\lambda(s_0 + n\lambda) = \frac{1}{4}\|L_\xi g_{ij}\|^2 \geq 0. \tag{4.4}$$

Если теперь предположить, что $s_0 > 0$, тогда из (4.4) при $\lambda < 0$ следует, что $0 < s_0 \leq n|\lambda|$. Если же $s_0 < 0$ и $\lambda > 0$, то из (4.4) следует, что $-n\lambda \leq s_0 < 0$. Доказана

Теорема 4.3. *Пусть (g_0, ξ, λ) – солитон Риччи на многообразии M^n $(n \geq 2)$ с метрикой g_0 постоянной скалярной кривизны s_0. Если $s_0 = 0$, то метрика g_0 будет Риччи-плоской, а векторное поле X_0 – инфинитезимальной гомотетией. Если же $s_0 \neq 0$, то ненулевые λ и s_0 имеют разные знаки и при этом для растягивающегося солитона имеем $-n\lambda \leq s_0 < 0$, а для стягивающегося солитона – $0 < s_0 \leq n|\lambda|$.*

5. Солитоны Риччи на полном некомпактном римановом многообразии

5.1. С.Т. Яу в статье [15] получил обобщенную версию теоремы Стокса для полного некомпактного n-мерного риманова многобразия (M, g). В качестве приложения им было доказано, что субгармоническая функция f такая, что $\Delta f \geq 0$, чей дифференциал df имеет интегрируемую норму на (M, g), то есть $\int\limits_M \|df\| < \infty$, является гармонической. Из этого утверждения, в частности, для градиентного солитона Риччи (g_0, ξ, λ) с субгармоническим потенциалом f следует, что $\Delta f = s_0 + n\lambda = 0$. Тогда из (4.4) имеем, что $L_\xi g_0 = 0$, и, следовательно, $\mathrm{Ric} = -\lambda g_0$. Таким образом, справедлива

Теорема 5.1. *Пусть на n-мерном $(n \geq 2)$ связном многообразии M задан солитон Риччи (g_0, ξ, λ), который удовлетворяет следующим условиям:*

1) *риманово многообразие (M, g_0) – полное некомпактное;*

2) *векторное поле ξ является градиентным с субгармоническим потенциалом f, чей дифференциал df имеет интегрируемую на (M, g_0) норму.*

Тогда солитон Риччи (g_0, ξ, λ) является эйнштейновым.

В статье [16] было доказано утверждение, вытекающее из основного результата С.Т. Яу. А именно, если на полном некомпактном n-мерном римановом многообразии (M, g) задано векторное поле ξ такое, что на (M, g) норма $\|\xi\|$ является интегрируемой функцией и $\operatorname{div}\xi$ не меняет свой знак, то $\operatorname{div}\xi = 0$ на (M, g). Поскольку для солитона Риччи $\operatorname{div}\xi = -(s_0 + n\lambda)$, то из (4.4) выводим, что $L_\xi g_0 = 0$, и, следовательно, $\mathrm{Ric} = -\lambda g_0$. Итак, имеет место

Теорема 5.2. *Пусть на n-мерном $(n \geq 2)$ связном многообразии M задан солитон Риччи (g_0, ξ, λ), который удовлетворяет следующим условиям:*

1) *риманово многообразие (M, g_0) – полное некомпактное;*

2) *норма $\|\xi\|$ векторного поля ξ является интегрируемой на (M, g_0) функцией;*

3) *$s_0 + n\lambda$ на (M, g_0) не меняет свой знак.*

Тогда солитон Риччи (g_0, ξ, λ) является эйнштейновым.

5.2. Рассмотрим на двумерном связном многообразии M градиентный солитон Риччи (g_0, ξ, λ), где $\xi = \omega^\sharp$ и $\omega = df$ для $f \in C^\infty M$. Тогда $\mathrm{Ric}_0 = 2^{-1} s_0 g_0$, причем в общем случае $s_0 \neq \mathrm{const}$. Для градиентного солитона (g_0, ξ, λ) уравнения (2.3) запишутся в следующем виде: $\nabla^0\nabla^0 f = -(2^{-1}s_0 + \lambda)g_0$, откуда следует, что $\Delta f = 2(2^{-1}s_0 + \lambda)$, поэтому уравнения градиентного солитона Риччи перепишутся следующим образом: $\nabla^0\nabla^0 f = -2^{-1}\Delta f g_0$.

Известно (см. теорему 6.3 главы 1 монографии [6]), что полное риманово многообразие (M, g) размерности $n \geq 2$, допускающее нетривиальное решение уравнения $\nabla\nabla f = -n^{-1}(\Delta f)g$, конформно сфере $(n+1)$-мерного евклидова пространства. Следовательно, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 5.3. *Если на двумерном связном многообразии M существует градиентный солитон Риччи (g_0, ξ, λ) с полной метрикой g_0 и скалярной кривизной $s_0 \neq \mathrm{const}$, то риманово многообразие (M, g_0) конформно сфере 3-мерного евклидова пространства.*

Замечание. Известно (см. [14]), что каждое двумерное компактное многообразие со стягивающимся солитоном Риччи, который, как известно, в этом случае является градиентным, изометрично либо двумерной сфере, либо вещественному двумерному проективному пространству.

Summary

S.E. Stepanov, I.G. Shandra, V.N. Shelepova. Infinitesimal Harmonic Transformations and Ricci Solitons.

A Ricci soliton on a smooth manifold M is a triple (g_0, ξ, λ), where g_0 is a complete Riemannian metric, ξ a vector field, and λ a constant such that the Ricci tensor Ric_0 of g_0 satisfies the equation $-2\mathrm{Ric}_0 = L_\xi g_0 + 2\lambda g_0$. In the paper, we study the geometry of Ricci solitons in dependence of the properties of the vector field ξ. In particular, we prove that this vector field is a harmonic transformation.

Key words: Riemannian manifold, infinitesimal harmonic transformation, Ricci soliton.

Литература

1. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. – М.: Мир, 1990. – 703 с.
2. *Де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия. – М.: Иностр. лит., 1956. – 250 с.
3. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи – Зингера об индексе. – М: Мир, 1970. – 359 с.
4. *Смольникова М.В., Степанов С.Е., Шандра И.Г.* Инфинитезимальные гармонические преобразования // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 5. – С. 69–75.
5. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
6. *Yano K.* Integral formulas in Riemannian geometry. – N. Y.: Marcel Dekker, 1970. – 156 p.
7. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
8. *Яно К., Бохнер С.* Кривизна и числа Бетти. – М.: Иностр. лит., 1957. – 152 с.
9. *Степанов С.Е., Шандра И.Г.* Гармонические диффеоморфизмы многообразий // Алгебра и анализ. – 2004. – Т. 16, № 2. – С. 154–171.
10. *Stepanov S.E., Shandra I.G.* Geometry of infinitesimal harmonic transformations // Ann. Global Anal. Geom. – 2003. – V. 24. – P. 291–299.
11. *Chow B., Knopf D.* The Ricci flow: An introduction / Mathematical surveys and monographs. V. 110. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2004. – 325 p.
12. *Chow B., Lu P., Ni L.* Hamilton's Ricci flow. Graduate studies in mathematics. V. 77. – Providence, RI: Amer. Math. Soc. – Science Press, 2006. – 608 p.
13. *Степанов С.Е., Шелепова В.Н.* О солитонах Риччи с условиями на скалярную кривизну и кривизну Риччи // Тез. докл. междунар. конф. «Геометрия в Одессе – 2008», 19–24 мая 2008 г. – Одесса: Фонд «Наука», 2008. – С. 127–128.
14. *Eminent M., La Nave G., Mantegazza C.* Ricci solitons – the equation point of view // Manuscr. Math. – 2008. – V. 127, No 3. – P. 345–367.
15. *Yau S.T.* Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry // Indiana Univ. Math. J. – 1976. – V. 25. – P. 659–670.
16. *Caminha A., Sousa P., Camargo F.* Complete foliations of space forms by hypersurfaces. – ArXiv:0908.0786v1 [math.DG]. – 2009. – 6 Aug. – 11 p.

Поступила в редакцию
25.08.09

Степанов Сергей Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Математика» Финансовой академии при Правительстве Российской Федерации, г. Москва.

E-mail: *stepanov@vtsnet.ru*

Шандра Игорь Георгиевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Финансовой академии при Правительстве Российской Федерации, г. Москва.

E-mail: *ma-tematika@yandex.ru*

Шелепова Вера Николаевна – аспирант кафедры «Геометрия и методика преподавания математики» Владимирского государственного гуманитарного университета.

E-mail: *verrochka@list.ru*